DEUXIÈME COMPOSITION
(Option générale)

Durée : 3 heures

Dans tout le problème on étudie des jeux (totalement imaginaires) associés à une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée : on obtient ainsi "Pile" ou "Face" avec la même probabilité 1/2.

I) LA RUINE D'UN JOUEUR

Un joueur souhaite acheter une voiture de luxe au-dessus de ses moyens et pour cela il se rend au casino. Le prix de la voiture correspond à N jetons (N entier strictement positif) et le joueur reçoit contre sa mise initiale k jetons ($0 \leq k \leq N$).
Le croupier effectue alors une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Lorsque le résultat est pile, le joueur reçoit un jeton, dans le cas contraire, il perd un jeton; le jeu se termine soit par la ruine du joueur, dès qu'il n'a plus de jeton (il n'y a donc aucun lancer si k est nul), soit par sa victoire dès qu'il a obtenu N jetons.
On notera p_k la probabilité pour que le joueur soit ruiné avec une mise initiale de k.

1. Justifier les égalités : $p_o = 1$ et $p_N = 0$

2. On suppose ici : $0 < k < N$. En considérant le résultat du premier lancer de la pièce, justifier la relation :

$$p_k = \frac{p_{k+1} + p_{k-1}}{2}$$

3. Pour tout k vérifiant : $0 < k \leq N$, on pose :

$$u_k = p_k - p_{k-1}$$

3.a. Montrer que u_k ne dépend pas de k et exprimer p_k en fonction de k et de u_1.

3.b. En déduire qu'on a, pour k vérifiant : $0 \leq k \leq N$:

$$p_k = 1 - \frac{k}{N}$$

II) UNE AUTRE REGLE DU JEU

Pour laisser plus de chance au joueur (ce que ne ferait bien sûr aucun patron de casino !), le jeu est modifié de la manière suivante : lorsque, au lancer i, le joueur perd son dernier jeton, la pièce ayant donné face (on conviendra alors de dire qu'il est ruiné), il lui est rendu au lancer suivant quel qu'en soit le résultat (la ruine n'est donc que momentanée); de plus, si sa fortune initiale est nulle, on lui donne un jeton après le premier lancer.
On notera M_k le nombre de fois où le joueur a été ruiné (momentanément) avant d'obtenir N jetons. Si sa fortune initiale est nulle ($k = 0$), on considère que le joueur a été ruiné une fois à l'instant 0.

1. Déterminer la probabilité que le joueur ne soit jamais ruiné au cours du jeu en utilisant la partie I.

2. En utilisant la partie I :
2.a. Déterminer la probabilité que le joueur soit ruiné au moins une fois.
2.b. Justifier la formule :

$$P[M_k \geq r] = \left(1 - \frac{k}{N}\right)\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{r-1}$$

où r est un entier strictement positif.
3. Déduire du II-2. que M_k est une variable aléatoire dont on donnera la loi, l'espérance et la variance.

III) UN CAS PARTICULIER
Dans toute cette partie la règle du jeu suivie est celle du II. On supposera que N est égal à 3 et que k est nul.

III-A) Etude préliminaire
Pour n entier naturel non nul, on désigne par E_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n vérifiant les conditions (1) et (2) :

(1) Tous les coefficients de la matrice sont positifs ou nuls :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, ((1 \leq i \leq n) \text{et} (1 \leq j \leq n)) \rightarrow a_{i,j} \geq 0$$

(2) Pour chaque colonne, la somme des termes des différentes lignes est égal à 1 :

$$\forall j \in \mathbb{N}, (1 \leq j \leq n) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

Montrer que E_n est stable par multiplication. En déduire que si A est élément de E_n, A^r est élément de E_n, pour tout r entier naturel non nul.

III-B) Représentation matricielle
Pour tout r entier naturel, on notera X_r la matrice colonne définie par :

$$X_r = \begin{pmatrix} u(0,r) \\ u(1,r) \\ u(2,r) \\ u(3,r) \end{pmatrix}$$

où u(i,r) représente (lorsque i varie entre 0 et 3) la probabilité que le joueur ait i jetons après r lancers. On conviendra que, lorsque le joueur a obtenu 3 jetons, les lancers peuvent continuer mais la fortune du joueur n'est plus modifiée.

1. Justifier l'égalité : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.a. Montrer qu'il existe une matrice A élément de E_4 telle que l'on ait, pour tout r entier naturel non nul :

$$X_r = A\, X_{r-1}$$

Expliciter A.

2.b. En déduire, pour r entier naturel, une expression de X_r en fonction de A, r et X_0.

2.c. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de A. Est-elle diagonalisable ?

3. On pose :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3.a. Montrer que, pour tout n entier naturel, il existe un réel α_n tel que :

$$B^{2n+1} = \alpha_n B$$

3.b. En déduire B^r pour toutes les valeurs de r entier naturel.

4.a. Montrer que, pour tout r entier naturel, il existe trois réels a_r, b_r et c_r tels que :

$$A^r = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & B^r & 0 \\ & & 0 \\ a_r & b_r & c_r \quad 1 \end{pmatrix}$$

4.b. En déduire, en utilisant III-A) l'expression de A^r en fonction de r (on pourra distinguer suivant la parité de r).

4.c. Donner une expression de X_r en fonction de r.

III-C) Les temps de ruine

On se propose ici d'étudier les différents instants (ou nombre de lancers déjà effectués) tels que le nombre de jetons du joueur soit nul (le joueur est momentanément ruiné) et ceci indépendamment de l'étude matricielle précédente. On pourra utiliser les résultats des parties I et II. On a convenu de poser k = 0, ainsi le joueur est ruiné à l'instant 0. On s'intéresse aux instants successifs, postérieurs au premier lancer (instant 1) auxquels ce phénomène se

reproduit, appelés temps de retour en 0. On rappelle que si le joueur a obtenu 3 jetons, les lancers peuvent continuer mais la fortune du joueur est inchangée.

1. Dans cette question, j désigne un entier naturel.

1.a. Quelle est la probabilité pour que la fortune du joueur ne soit jamais nulle sauf au premier lancer.

1.b. Montrer que, tant que le joueur n'a pas obtenu les 3 jetons convoités, la parité du nombre de jetons détenus par le joueur est égale à la parité du nombre de lancers effectués. En déduire que la probabilité que la fortune du joueur soit nulle à l'instant $(2j + 1)$ est nulle.

1.c. Vérifier que, si le premier temps de retour en 0 a lieu à l'instant $(2j + 2)$, alors, la fortune du joueur n'a pris, à l'issue des lancers k $(1 \leq k < (2j+2))$ que les valeurs 1 ou 2.

1.d. On note T la variable aléatoire qui vaut 0 lorsque la fortune du joueur n'est jamais nulle après au moins un lancer et qui, sinon, est égale au premier temps de retour en 0. Donner la loi de T.

2. De manière plus générale, pour tout r entier naturel strictement positif, on notera S_r la variable aléatoire égale à 0 si le joueur est ruiné moins de $(r+1)$ fois au cours du jeu (on rappelle que le joueur est ruiné au moins une fois à l'instant 0) et, dans le cas contraire, égale au premier instant où le joueur est ruiné pour la $(r+1)$-ième fois (en comptant 0).

2.a. Montrer que S_r prend, outre la valeur nulle, des valeurs de la forme :

$$2j + 2r$$

où j est un entier naturel.

2.b. Interpréter, pour r-1 entiers vérifiant : $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_{r-1}$, l'événement :

$$\left[\bigcap_{i=1}^{r-1} (S_i = 2k_i)\right]$$

2.c. On suppose vérifiée la relation : $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_{r-1} < j+r$. Justifier :

$$P\left[(S_r = 2j+2r) \cap (S_1 = 2k_1) \cap \ldots \cap (S_{r-1} = 2k_{r-1})\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2j+r}$$

2.d. En déduire l'égalité :

$$\forall j \in \mathbb{N}, P[S_r = 2j+2r] = C_{j+r-1}^{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2j+r}$$

3.a. Comparer les événements $[S_r = 0]$ et $[M_0 \geq (r+1)]$.

3.b. En déduire la probabilité de $[S_r = 0]$.

4.a. Pour tout x réel élément de $]-1,1[$, on pose :

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$$

En considérant $F^{(p)}(x)$ pour tout p entier naturel, justifier la relation :

$$\frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} x^n$$

4.b. A l'aide de la formule précédente, justifier a posteriori par le calcul le fait que S_r est bien une variable aléatoire.